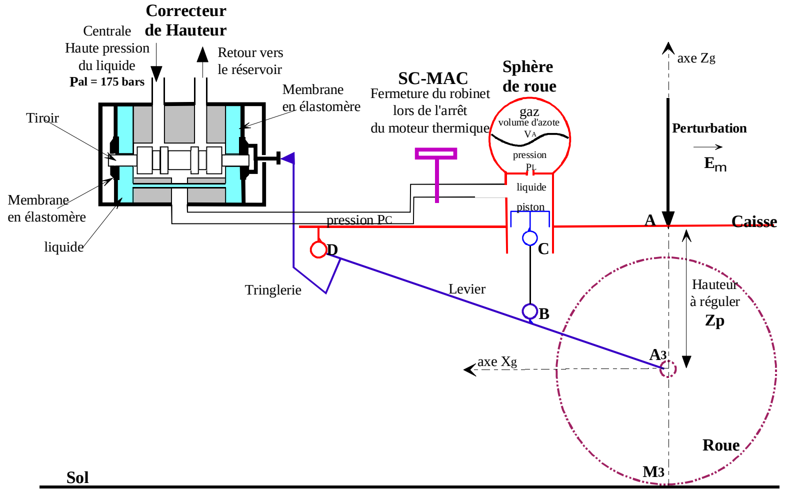
LES SYSTEMES AUTOMATISES

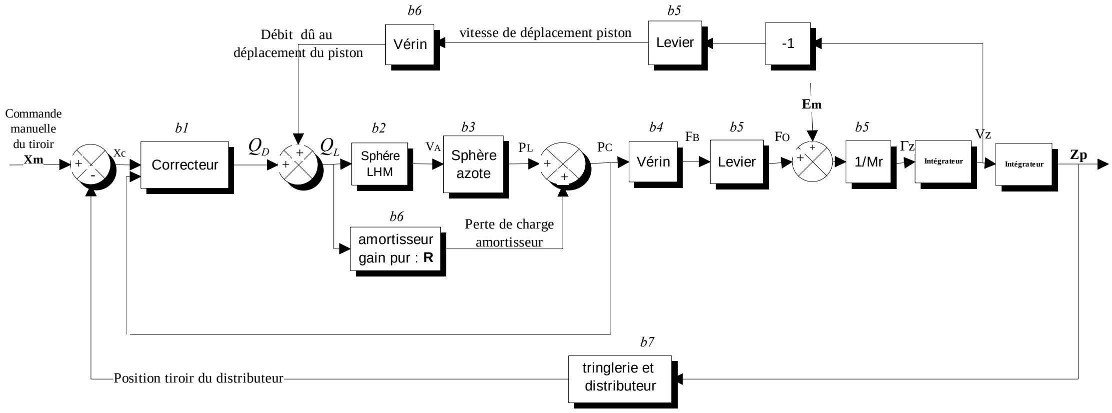
Transformées de Laplace - Calcul symbolique

Modèle transfert



Suspension hydropneumatique avec correction de hauteur de caisse (roue arrière)

Le schéma fonctionnel

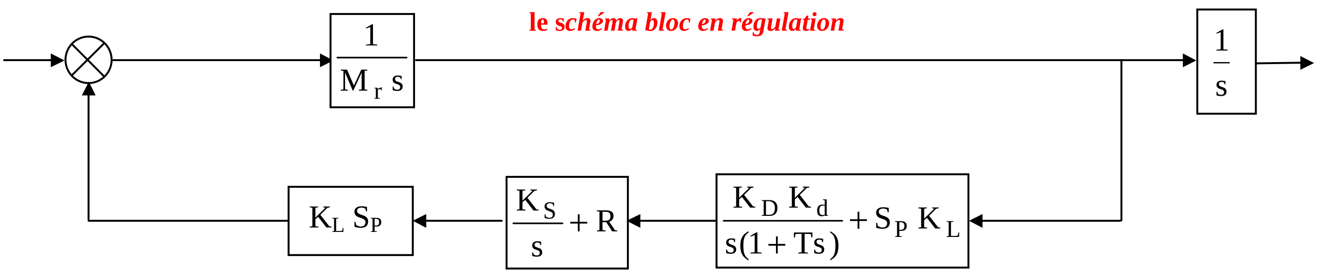


Em : Perturbation
V_A : Volume d'azote dans la sphère de roue
P_L : Pression du liquide dans la sphère de roue
P_C : Pression du liquide dans le circuit hydraulique

Zp : Position de la caisse / axe de la roue
Q_D : Débit du liquide à la sortie du correcteur
Q_L : Débit du liquide entrant dans la sphère de roue
F_O : Projection sur z_g de l'effort de la roue sur le levier au point O
F_B : Projection sur z_g de l'effort du levier sur la biellette BC au point B

Schéma fonctionnel de la suspension hydropneumatique avec correction de hauteur de caisse

le schéma bloc en régulation



En régulation, *la fonction de transfert* de la suspension hydrodynamique en mode ferme s'écrit :

$$H_r(s) = \frac{s(Ts+1)}{\mathrm{MrT}s^4 + \left(\mathrm{Mr} + \mathrm{KL}^2\,\mathrm{SP}^2\,\mathrm{R\,T}\right)s^3 + \left(\mathrm{KL}^2\,\mathrm{SP}^2\,(\mathrm{R} + \mathrm{KS\,T})\right)s^2 + \left(\mathrm{KL\,SP}\,(\mathrm{R\,Kd\,KD} + \mathrm{KL\,SP\,KS})\right)s + \mathrm{KL\,KS\,Kd\,KD\,SP}}$$

Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

Automatique : Transformée de Laplace

Cours (1ère partie)

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

* *

* *

TRANSFORMEE DE LAPLACE. CALCUL SYMBOLIQUE. MODELE TRANSFERT.

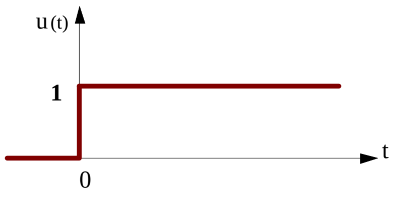
1.1 Définitions.

1.1.1 FONCTION CAUSALE

On appelle ainsi une fonction u(t) pour laquelle : $u(t) = 0 \ ; \ \forall\, t < 0$.
Dans la suite du document, nous utiliserons exclusivement des fonctions causales.

1.1.2 FONCTION ECHELON UNITE (OU FONCTION DE HEAVISIDE)

- $\forall\, t < 0 \ ; \ u(t) = 0$
- $\forall\, t > 0 \ ; \ u(t) = 1$



Remarque :
Dans ce qui suit on ne s'intéressera pas à la fonction $\sin(\omega t)$, par exemple, mais à la fonction causale $\sin(\omega t).u(t)$:

$$\sin(\omega\, t)\, u_{(t)} = 0, \qquad \forall\, t < 0 \ \text{ et } \qquad \sin(\omega\, t)\, u_{(t)} = \sin(\omega\, t), \quad \forall\, t > 0$$

1.1.3 TRANSFORMEE DE LAPLACE MONOLATERALE (OU CLASSIQUE)

On appelle transformée de Laplace L mono latérale (si elle existe) d'une fonction $f_{(t)}$ causale, la fonction :

$$L\,[f(t)] = F(p) = \int_{O^+}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

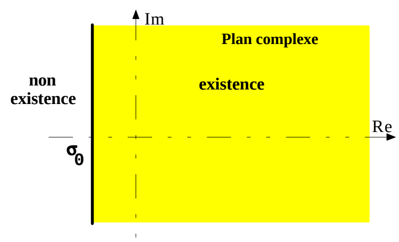
avec la variable p complexe, $p = \sigma + i\,\omega$

Remarques :

On n'exposera pas les conditions d'existence de la transformée, remarquons seulement que :

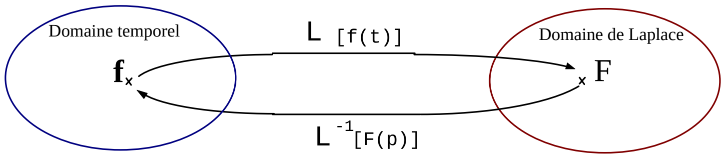
- $f_{(t)}$ doit être d'ordre exponentiel, c'est à dire majorable à l'infini par des exponentielles.
- à L $[f_{(t)}] = F_{(p)} = \int_{O^+}^{+\infty} f_{(t)}\, e^{-pt}\, dt$ correspond un nombre réel σ_0 appelé abscisse de convergence de f, tel que :

L $[f_{(t)}] = F_{(p)}$ existe si $\quad R_e(p) = \sigma > \sigma_0$
L $[f_{(t)}] = F_{(p)}$ n'existe pas si $\quad R_e(p) = \sigma < \sigma_0$



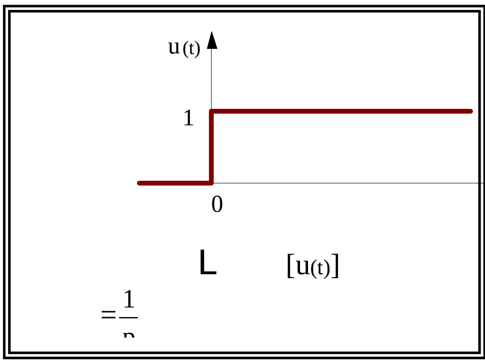
- La correspondance entre f(t) et F(p) est biunivoque.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \to f(t)$	$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $p \to F(p)$
Fonctions réelles à variable réelle	Fonctions complexes à variable complexe



1.2 Calcul des transformées usuelles.

1.2.1 ÉCHELON UNITE



$u(t) = 0, \ \forall\, t < 0$

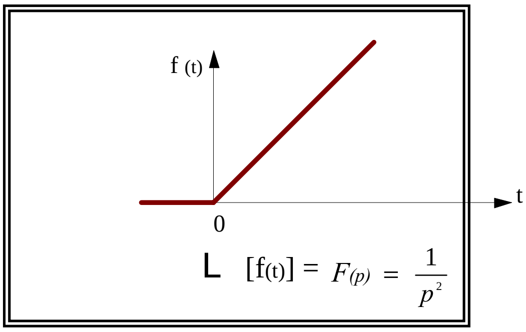
$u(t) = 1, \ \forall\, t > 0$

$$L\,[u(t)] = F(p) = \int_{o^+}^{+\infty} e^{-pt}\,dt$$

$$L\,[u(t)] = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_{0^+}^{\infty} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right) - \lim_{t\to 0}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)$$

$$L\,[u(t)] = \frac{1}{p}$$

1.2.2 RAMPE UNITAIRE



$f(t) = t\,u(t)$

$$L\,[f(t)] = F(p) = \int_{o^+}^{+\infty} t\, e^{-pt}\,dt$$

En intégrant par partie

$$U = t \qquad \frac{dU}{dt} = 1$$

$$\frac{dV}{dt} = e^{-pt} \qquad V = -\frac{e^{-pt}}{p}$$

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dUV}{dt}\, dt = \int_{0^+}^{\infty} U \frac{dV}{dt}\, dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dU}{dt} V\, dt$$

$$\left[-t\, \frac{e^{-pt}}{p} \right]_{0^+}^{\infty} = F(p) + \int_{0^+}^{\infty} -\frac{1}{p}\, e^{-pt}\, dt$$

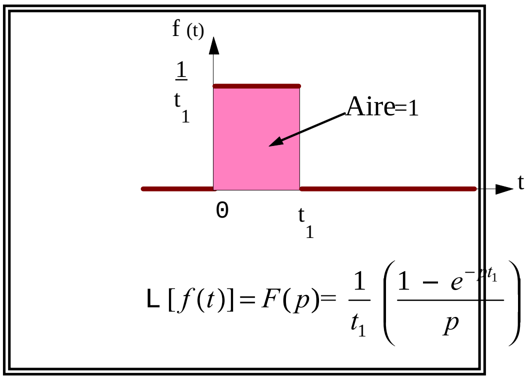
$$\lim_{t \to \infty} \left(-t\, \frac{e^{-pt}}{p} \right) - 0 = F(p) + \left[\frac{1}{p^2}\, e^{-pt} \right]_{0^+}^{\infty}$$

$$0 - 0 = F(p) - \frac{1}{p^2}$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2}$$

1.2.3 IMPULSION PHYSIQUE (OU CRENEAU) DE SURFACE UNITE

$$f(t) = \frac{1}{t_1} \quad \text{si } t \in \,]0, t_1[\,, \quad f(t) = 0 \quad \text{si } t \notin [0, t_1]$$

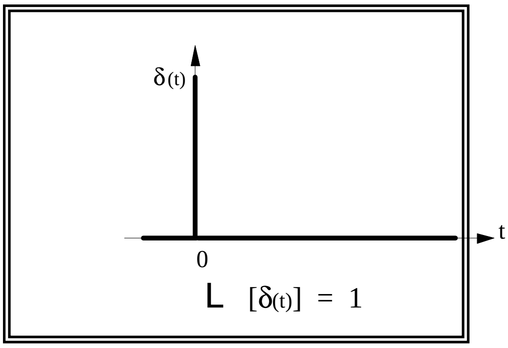


$$L\,[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{t_1} \frac{1}{t_1}\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \frac{1}{t_1}\left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_{0^+}^{t_1} = \frac{1}{t_1}\left(\frac{e^{-pt_1}}{p} + \frac{1}{p} \right)$$

$$F(p) = \frac{1}{t_1}\left(\frac{1 - e^{-pt_1}}{p} \right)$$

1.2.4 VI.2.4 IMPULSION DE DIRAC UNITAIRE



On définit l'impulsion de Dirac unitaire en faisant tendre t_1 vers 0 dans le créneau unitaire. Cela revient à générer une amplitude infinie pendant un temps nul, ce qui ne correspond évidemment à aucun signal physique réel, mais cette fonction peut être utile dans l'analyse théorique du comportement temporel d'un système.

***Remarque :** si pour piloter un système automatique, lors du calcul par le modèle, on démontre qu'il est nécessaire d'envoyer un Dirac, il sera nécessaire de modifier l'automatisme (le schéma bloc). Un Dirac est impossible à réaliser avec précision.*

$$L\,[\delta(t)] = \lim_{t_1 \to 0} \left(\frac{1 - e^{-pt_1}}{pt_1} \right)$$

Avec le développement limité : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$$\mathcal{L}\,[\delta(t)] = \lim_{t_1 \to 0} \left(\frac{1 - (1 - pt_1)}{pt_1} \right)$$

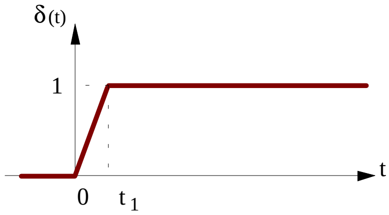
$$\mathcal{L}\,[\delta(t)] = 1$$

Remarque :

Soit la fonction : $g_{t_1} = 0$ si $t < 0$

$g_{t_1} = \dfrac{t}{t_1}$ si $0 < t < t_1$ $\qquad \dfrac{dg_{t_1}}{dt} = \dfrac{1}{t_1}$

$g_{t_1} = 1$ si $t > t_1$



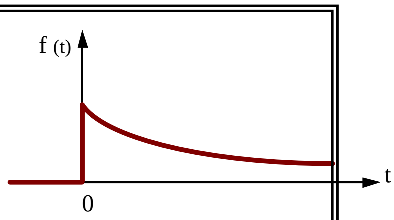
alors l'échelon unité $u(t) = \lim\limits_{t_1 \to 0^+} g_{t_1}$

et l'impulsion de Dirac unitaire $\delta(t) = \lim\limits_{t_1 \to 0^+} \dfrac{dg_{t_1}}{dt}$

Ainsi l'impulsion de Dirac unitaire apparaît comme la dérivée de l'échelon unité.

1.2.5 FONCTION EXPONENTIELLE

$$f(t) = e^{-at}.u(t)$$



$$F(p) = \frac{1}{p+a}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-at}\, e^{-pt}\, dt$$

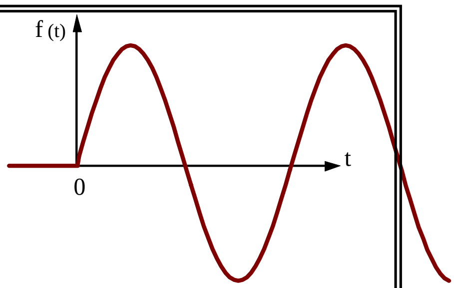
$$\mathcal{L}(f(t)) = \left[\frac{-e^{-(p+a)t}}{p+a} \right]_{0^+}^{+\infty}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \frac{1}{p+a}$$

1.2.6 FONCTION SINUS

$$f(t) = \sin(\omega_0 t).u(t)$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_{0^+}^{+\infty} \sin(\omega_0 t).\, e^{-pt}\, dt$$



$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \left[-\frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t).\, e^{-pt} \right]_{0^+}^{+\infty} - \int_{0^+}^{+\infty} \frac{p}{\omega_0} \cos(\omega_0 t).\, e^{-pt}\, dt$$

L'intégrale restante peut à son tour être calculée par parties :

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{\omega_0} - \frac{p}{\omega_0} \left\{ \left[\frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).\, e^{-pt} \right]_{0^+}^{+\infty} + \frac{p}{\omega_0} \int_{0^+}^{+\infty} \sin(\omega_0 t).\, e^{-pt}\, dt \right\}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{\omega_0} - \frac{p}{\omega_0}\left\{\frac{p}{\omega_0}.\mathcal{L}(f(t))\right\}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^{\ 2}}$$

1.2.7 TABLEAU DES TRANSFORMEES USUELLES

Ce tableau fait partie des connaissances indispensables.

Domaine temporel	Domaine de Laplace
$f(t)$ est une fonction causale $f(t)=0 \quad \forall\, t<0$ pour $\forall\, t>0 \quad f(t)=$	$\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$
$f(t)=1$	$F(p)=\frac{1}{P}$
$f(t)=t$	$F(p)=\frac{1}{P^2}$
$f(t)=e^{-at}$	$F(p)=\frac{1}{p+a}$
$f(t)=\sin(\omega_0 t)$	$F(p)=\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^{\ 2}}$
$f(t)=\cos(\omega_0 t)$	$F(p)=\frac{p}{p^2+\omega_0^{\ 2}}$
$f(t)=e^{-at}\sin(\omega_0 t)$	$F(p)=\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^{\ 2}}$
$f(t)=e^{-at}\cos(\omega_0 t)$	$F(p)=\frac{(p+a)}{(p+a)^2+\omega_0^{\ 2}}$
$f(t)=K\left[1-e^{-\frac{t}{T}}\right]$	$F(p)=\frac{K}{1+Tp}$
$f(t)=\frac{\omega_p}{1-\xi^2}e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_p t)$ $avec\ \ \omega_p=\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$	$F(p)=\frac{\omega_0^{\ 2}}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^{\ 2}}\ avec\ \xi<1$
$f(t)=\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(e^{-t/\tau_1}-e^{-t/\tau_2}\right)$	$F(p)=\frac{1}{(\tau_1 p+1)(\tau_2 p+1)}$
$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$

1.2.7.1 Remarques importantes

On remarquera que la forme mathématique de f(t) est liée aux pôles de F(p) c'est à dire aux valeurs de p pour lesquelles le dénominateur de F(p) s'annule.

D'une part :

- à un pôle réel (p = - a) correspond une fonction exponentielle,
- à une paire de pôles imaginaires purs (p = ± i ω) une fonction harmonique,
- à une paire de pôles complexes conjugués (p = - a ± i ω) une fonction harmonique multipliée par une exponentielle,

d'autre part :

- à un pôle de partie réelle négative correspond une exponentielle amortie (ou une fonction harmonique multipliée par exponentielle amortie),
- à un pôle de partie réelle positive correspond une exponentielle amplifiée (ou une fonction harmonique multipliée par exponentielle amplifiée).

1.3 Propriétés de la transformée de Laplace

1.3.1 SUPERPOSITION LINEAIRE

1.3.1.1 Additivité

Si $f_{(t)}$ et $g_{(t)}$ ont des transformées de Laplace alors :

$$\mathcal{L}\,[f_{(t)} + g_{(t)}] = \mathcal{L}\,[f_{(t)}] + \mathcal{L}\,[g_{(t)}]$$

1.3.1.2 proportionnalité

Si $f_{(t)}$ à une transformée de Laplace et λ est une constante alors :

$$\mathcal{L}\,[\lambda.f_{(t)}] = \lambda.\mathcal{L}\,[f_{(t)}]$$

1.3.2 DERIVATION

Si $f_{(t)}$ a une transformée de Laplace alors :

1.3.2.1 ordre 1

recherche de la transformée de Laplace : $\mathcal{L}\left[\frac{d\,f_{(t)}}{dt}\right] = \int_{0^+}^{+\infty} \frac{d\,f_{(t)}}{dt}\, e^{-pt}\, dt$

En intégrant par partie :

$\frac{dU}{dt} = \frac{df_{(t)}}{dt}$	$\frac{dV}{dt} = -p.e^{-pt}$
$V = e^{-pt}$	$U = f(t)$

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dUV}{dt}\, dt = \int_{0^+}^{\infty} U\,\frac{dV}{dt}\, dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dU}{dt}\, V\, dt$$

$$\left[f_{(t)}\, e^{-pt}\right]_{0^+}^{\infty} = \int_{0^+}^{\infty} -\,p\; f_{(t)}\, e^{-pt}\, dt + \mathcal{L}\left[\frac{d\,f_{(t)}}{dt}\right]$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(f(t)\,e^{-pt}\right) - f(0^+) = -\,p\int_{0^+}^{\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt + \mathcal{L}\left[\frac{d\,f(t)}{dt}\right]$$

$$0 \;-f(0^+) = -\,p\,\mathcal{L}\left[f(t)\right] + \mathcal{L}\left[\frac{d\,f(t)}{dt}\right]$$

on obtient : $\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d\,f(t)}{dt}\right] = p\;\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0^+) = p.F(p) - f(0^+)}$

1.3.2.1.1Notion de point d'étude un système automatisé ou conditions de Heaviside

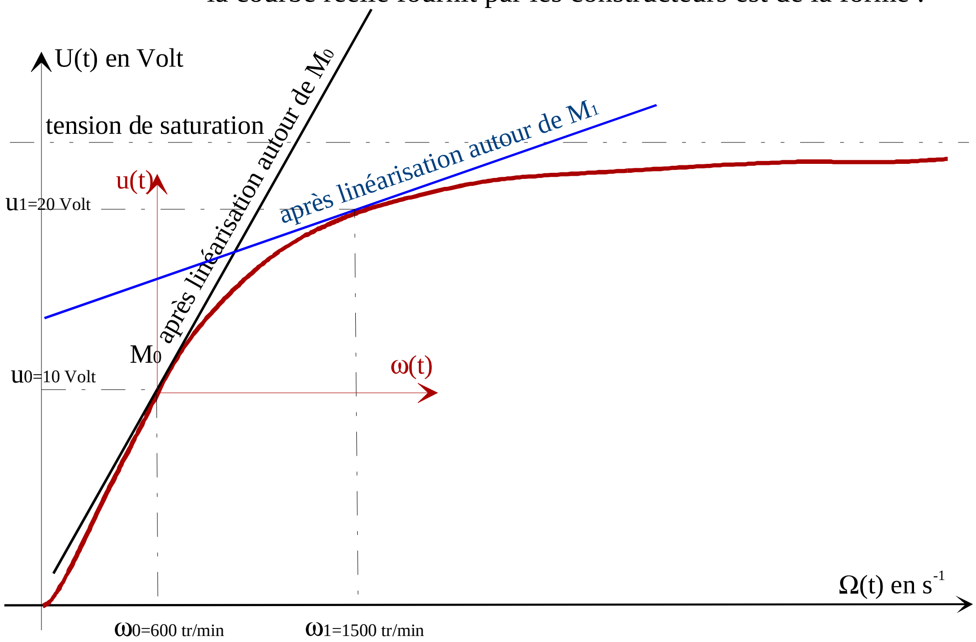
$\mathcal{L}\left[\frac{d\,f(t)}{dt}\right] = p\;\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0^+) = p.F(p) - f(0^+)$, Intéressant si $f(0^+)=0$.

Pour ce faire, il sera nécessaire de faire un changement de variable autour un point dit d'étude (ou d'équilibre pour les systèmes automatisés)

Par exemple : pour un moteur à courant continu, piloté en tension de schéma fonctionnel :

$$U(t) \longrightarrow \boxed{\text{Moteur}} \longrightarrow \Omega(t)$$

la courbe réelle fournit par les constructeurs est de la forme :



Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

Les lois de comportement du moteur se modélisent à l'aide des équations :

$U(t)-E(t)=L\dfrac{dI(t)}{dt}+RI(t)$ $E(t)=Ke.\Omega(t)$ $Cm(t)-Cr(t)-f.\Omega(t)=J\dfrac{d\Omega(t)}{dt}$ $Cm(t)=Kt.I(t)$	U(t) : Tension d'entrée E(t) : Tension aux bornes du moteur $\Omega(t)$: fréquence de rotation du rotor I(t) : courant dans l'induit Cm(t) : couple moteur Cr(t) : couple récepteur f ; Coefficient de frottement visqueux dans la liaison pivot. R : résistance de l'induit L : inductance de l'induit

Le point d'étude a pour coordonnées : $M_0\{e_0;cm_0;i_0;u_0;\omega_0;cr_0\}$

On pose le changement de variable suivant, ceci pour étudier les variation de comportement du moteur autour du point d'équilibre M_0.

changement de variable	Les équations deviennent :
$U(t)=u(t)+u_0$ $E(t)=e(t)+e_0$ $\Omega(t)=\omega(t)+\omega_0$ $Cm(t)=cm(t)+cm_0$ $I(t)=i(t)+i_0$ $Cr(t)=cr(t)+cr_0$ avec $u(0)=0;e(0)=0;i(0)=0$ $\omega(0)=0;cm(0)=0;cr(0)=0$	À l'instant t : $u(t)+u_0-e(t)-e_0=L\dfrac{di(t)}{dt}+Ri(t)+Ri_0$ $e(t)+e_0=Ke.\omega(t)+Ke.\omega_0$ $cm(t)+cm_0-cr(t)-cr_0=J\dfrac{d\omega(t)}{dt}+f.\omega(t)+f.\omega_0$ $cm(t)+cm_0=Kt.i(t)+K.i_0$ à l'instant t_0=0 : $u_0-e_0=Ri_0$ $e_0=Ke.\omega_0$ $cm_0-cr_0=f.\omega_0$ $cm_0=K.i_0$

Les équations autour du point d'équilibre M_0 :	
$u(t)-e(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}+Ri(t)$ $e(t)=Ke.\omega(t)$	$cm(t)-cr(t)=J\dfrac{d\omega(t)}{dt}+f.\omega(t)$ $cm(t)=Kt.i(t)$

Appliquons la transformée de Laplace :

$$u(t)-e(t)=L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)$$
$$e(t)=Ke.\omega(t)$$
$$cm(t)-cr(t)=J\frac{d\omega(t)}{dt}+f.\omega(t)$$
$$cm(t)=Kt.i(t)$$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$

Les conditions initiales sont donc nulles.

$$U(p)-E(p)=(Lp+R)I(p)$$
$$E(p)=Ke.\Omega(p)$$
$$Cm(p)-Cr(p)=(Jp+f).\Omega(p)$$
$$Cm(p)=Kt.I(p)$$

Attention à la convention de notation :

$u(t)$ Lettre minuscule et $u(t)$ est un infiniment petit du premier ordre en général, et nul pour t=0	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ Transformée de Laplace	$U(p)$ Lettre majuscule et p est un complexe

1.3.2.2 ordre 2

Calculons $\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p\,(p\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0^+)) - \left(\frac{d\,f(t)}{dt}\right)_{0^+}$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2\,\mathcal{L}[f(t)] - p\,f(0^+) - \left(\frac{d\,f(t)}{dt}\right)_{0^+}$$

Avec les conditions initiales : $f(o^+)=0$; $\left(\frac{d\,f(t)}{dt}\right)_{0^+}=0$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2\,\mathcal{L}[f(t)]}$$

1.3.2.3 ordre n

Avec les conditions initiales : $f(o^+)=0$; $\left(\frac{d\,f(t)}{dt}\right)_{0^+}=0$; …….. ; $\left(\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}\right)_{0^+}=0$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n\,\mathcal{L}[f(t)]}$$

1.3.3 INTEGRATION

Si $f(t)$ a une transformée de Laplace. Soit $g(t)=\int_0^t f(u)\,du$ alors $\frac{d\,g(t)}{dt}=f(t)$

On admettra que $g(t)$ a une transformée de Laplace, ainsi

$$\mathcal{L}\left[\frac{d\,g(t)}{dt}\right] = p\,\mathcal{L}[g(t)] - g(0^+)$$

$$\mathsf{L}\left[\int_0^t f_{(u)}\,du\right] = \frac{1}{p}\ \mathsf{L}\left[f_{(t)}\right] + \frac{g(0^+)}{p}$$

Avec la condition initiale $g(0^+) = 0$

$$\mathsf{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{1}{p}\ \mathsf{L}\left[f_{(t)}\right]$$

1.3.4 DERIVATION ET INTEGRATION PRATIQUE DANS LE DOMAINE DE LAPLACE.

Si les conditions initiales sont nulles (condition de Heaviside)

- Dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine de Laplace.

L'intérêt est clair, remplacer les équations différentielles par des équations algébriques, cette méthode est à rapprocher de la méthode qui consiste, lorsque l'on part de l'équation : $a\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = 0$ à chercher la solution sous la forme : $x(t) = e^{rt}$ ou r est une constante réelle ou complexe. L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée l'équation caractéristique relative à l'équation différentielle.

- Intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine de Laplace.

1.3.5 THEOREME DE LA VALEUR FINALE

On admettra que : (La démonstration n'est pas au programme de C.P.G.E.)

$$\lim_{t\to\infty} f_{(t)} = \lim_{p\to 0} p\ F_{(p)}$$

Où $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.

Si les limites envisagées existent, pour les fonctions qui nous préoccuperont si tous les pôles de p $F_{(p)}$ ont leur partie réelle négative et non nulle.

(En clair, et en langage automatique : la fonction f(t), (par abus de langage F(p)) est stable.

1.3.6 THEOREME DE LA VALEUR INITIALE

On admettra que : (La démonstration n'est pas au programme de C.P.G.E.)

$$\lim_{t\to 0^+} f_{(t)} = \lim_{p\to\infty} p\ F_{(p)}$$

Où $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.

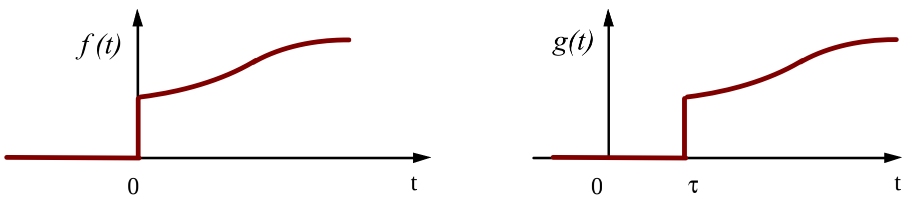
Si les limites envisagées existent, pour les fonctions qui nous préoccuperont si tous les pôles de p $F_{(p)}$ ont leur partie réelle négative et non nulle.

1.3.7 THEOREME DU RETARD

Si $f_{(t)}$ a une transformée de Laplace $F_{(p)}$.

Soit $g_{(t)}$ une fonction déduite de $f_{(t)}$ en lui faisant subir un décalage temporel ou un retard τ

$$g(t) = f(t-\tau)$$



par transformée de Laplace, on obtient : $\mathsf{L}\left[f(t-\tau)\right] = \int_{0^+}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}\,dt$

Et en posant le changement de variable : $T = t - \tau$ et $dT = dt$; il vient :

$$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right]=\int_0^{+\infty} f(T).e^{-p(T+\tau)}\,dt$$

$$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right]=e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} f(T).e^{-p(T+\tau)}\,dt$$

d'où :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right]=e^{-p\tau}.\mathcal{L}\left[f(t)\right]}$$